نام درس: سیگنالها و سیستم - استاد اخایی
محمد امانلو

تکلیف شماره ۷

۸۱۰۱۰۰۰۸۴

۱ سوال اول

(الف) به‌دست آوردن پاسخ ضربه $h[n]$ برای سیستم **LTI** علی
رابطه‌ی ورودی خروجی:

$$y[n] + \frac{5}{4}\,y[n-1] + \frac{3}{8}\,y[n-2] = x[n].$$

با گرفتن تبدیل Z (با فرض شرایط اولیه‌ی صفر):

$$Y(z)\Big(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}\Big) = X(z) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}}.$$

مخرج را فاکتور می‌کنیم:

$$1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} = \Big(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\Big)\Big(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\Big).$$

پس

$$H(z) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{3}{4}z^{-1})} = \frac{C}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{D}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}.$$

با حل ضرایب:

$$C = -2, \qquad D = 3$$

و بنابراین:

$$H(z) = \frac{-2}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}.$$

چون سیستم علی است، ناحیه‌ی همگرایی $H(z)$ بیرون بزرگ‌ترین قطب است:

$$\square\square\square: \quad |z| > \frac{3}{4}.$$

اکنون وارون تبدیل:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 + az^{-1}}\right\} = (-a)^n u[n] \quad (|z| > |a|).$$

پس پاسخ ضربه:

$$\boxed{h[n] = \Big(-2\big(-\tfrac{1}{2}\big)^n + 3\big(-\tfrac{3}{4}\big)^n\Big)u[n].}$$

(ب) نواحی همگرایی $X(z)$ و بررسی علی‌بودن و پایداری

داده شده:

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}\right)}.$$

ابتدا فاکتورگیری:

$$1 - \frac{1}{4}z^{-2} = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right),$$
$$1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} = \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right).$$

پس یک عامل حذف می‌شود و داریم:

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right)}.$$

قطب‌ها از مخرج:

$$1 + \frac{3}{4}z^{-1} = 0 \Rightarrow z = -\frac{3}{4}, \qquad 1 + \frac{1}{4}z^{-2} = 0 \Rightarrow z = \pm j\frac{1}{2}.$$

بنابراین شعاع قطب‌ها: $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ و در نتیجه سه ROC ممکن داریم:

۱.

$$|z| > \frac{3}{4}$$

علی‌بودن: چون ROC شامل ∞ است $\Rightarrow$ دنباله راست‌طرفه (علی).
پایداری: چون دایره‌ی واحد $|z| = 1$ داخل ROC است $\Rightarrow$ پایدار.

۲.

$$\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{4}$$

علی‌بودن: ROC نه شامل 0 است نه شامل ∞ $\Rightarrow$ دنباله دوطرفه (غیرعلی).
پایداری: دایره‌ی واحد داخل ROC نیست $\Rightarrow$ ناپایدار.

۳.

$$|z| < \frac{1}{2}$$

علی‌بودن: چون ROC شامل 0 است $\Rightarrow$ دنباله چپ‌طرفه (پادعلی).
پایداری: دایره‌ی واحد داخل ROC نیست $\Rightarrow$ ناپایدار.

۲ سوال دو

از شکل، سیگنال روی مسیر بالایی (خروجی جمع‌کننده‌ی چپ و ورودی جمع‌کننده‌ی راست) را $v[n]$ می‌گیریم. همچنین خروجی تأخیر اول را $u[n]$ و خروجی تأخیر دوم را $w[n]$ می‌نامیم. پس:

$$u[n] = v[n-1], \qquad w[n] = u[n-1] = v[n-2].$$

جمع‌کننده‌ی پایین چپ:

$$s[n] = a\,u[n] + 2\,w[n] = a\,v[n-1] + 2\,v[n-2].$$

جمع‌کننده‌ی بالای چپ:

$$v[n] = x[n] + s[n] = x[n] + a\,v[n-1] + 2\,v[n-2].$$

جمع‌کننده‌ی سمت راست (خروجی):

$$y[n] = v[n] + b\,u[n] = v[n] + b\,v[n-1].$$

تابع تبدیل: با گرفتن تبدیل Z:

$$V(z)\big(1 - az^{-1} - 2z^{-2}\big) = X(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{V(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1} - 2z^{-2}},$$

و چون

$$Y(z) = (1 + bz^{-1})V(z),$$

داریم

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + bz^{-1}}{1 - az^{-1} - 2z^{-2}} = \frac{z^2 + bz}{z^2 - az - 2}.}$$

قطب‌ها:

$$z^2 - az - 2 = 0 \;\Rightarrow\; z_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8}}{2}, \qquad z_1 z_2 = -2 \;\Rightarrow\; |z_1||z_2| = 2.$$

پس همیشه حداقل یکی از قطب‌ها قدرمطلقی بزرگ‌تر از 1 دارد (چون $\max(|z_1|, |z_2|) \geq \sqrt{2} > 1$).

(الف) علی باشد اما پایدار نباشد؟ برای یک سیستم rational LTI اگر ROC بیرون بزرگ‌ترین قطب باشد، سیستم علی است:

$$\text{ROC (علی)}: \quad |z| > \max(|z_1|, |z_2|).$$

اما چون $\max(|z_1|, |z_2|) > 1$، دایره‌ی واحد $|z| = 1$ داخل ROC نیست؛ بنابراین سیستم BIBO پایدار نیست.

$$\boxed{\text{بله؛ (با انتخاب ROC علی) سیستم حتماً ناپایدار می‌شود.}}$$

(مثلاً $a = 0, b = 0$)

(ب) پایدار باشد اما علی نباشد؟ پایداری یعنی دایره‌ی واحد داخل ROC باشد. برای غیرعلی بودن، ROC نباید شامل ∞ باشد. این کار (به شرط نبودن قطب روی دایره‌ی واحد) شدنی است.

اگر $a = \pm 1$ یکی از قطب‌ها روی $|z| = 1$ می‌افتد (به‌ترتیب $z = -1$ یا $z = 1$) و هیچ ROC پایداری وجود ندارد. پس فرض کنید:

$$a \neq \pm 1.$$

حالت ۱: $|a| < 1$ هر دو قطب بیرون دایره‌ی واحد می‌افتند ($|z_1| > 1, |z_2| > 1$). در این صورت می‌توان ROC ضدعلی (چپ‌طرفه) گرفت:

$$\text{ROC (ضدعلی)}: \quad |z| < \min(|z_1|, |z_2|),$$

که چون $\min(|z_1|,|z_2|) > 1$، دایره‌ی واحد داخل ROC است $\Rightarrow$ پایدار ولی غیرعلی.
حالت ۲: $|a| > 1$ یکی از قطب‌ها داخل و دیگری خارج دایره‌ی واحد می‌افتد (چون $|z_1||z_2| = 2$). در این صورت می‌توان ROC بین دو قطب (دوطرفه) گرفت:

$$\text{ROC (دوطرفه)}: \quad \min(|z_1|,|z_2|) < |z| < \max(|z_1|,|z_2|),$$

که شامل $|z| = 1$ هست $\Rightarrow$ پایدار ولی غیرعلی.
پس:

بله؛ برای هر b و برای هر a مخالف ۱ می‌توان سیستم پایدار غیرعلی ساخت.

(مثلاً $a = 0, b = 0$ با ROC ضدعلی، یا $a = 2, b = 0$ با ROC دوطرفه)

(پ) هم پایدار و هم علی باشد؟
تذکر مهم (دو تفسیر رایج): گاهی در درس، «پایدار و علی بودن» را فقط از روی $H(z)$ و ROC (یعنی BIBO و ورودی خروجی) بررسی می‌کنند. اما گاهی نیز منظور «همین پیاده‌سازی شکل» و پایداری/علیت همان ساختار (پایداری داخلی) است. نتیجه‌ی (پ) در این دو تفسیر متفاوت می‌شود:

تفسیر ۱: بدون اجازه‌ی حذف قطب-صفر (عدم **cancellation**) / یا پایداری داخلی همین ساختار برای علی بودن باید ROC بیرون بزرگ‌ترین قطب باشد. برای پایداری باید $|z| = 1$ داخل ROC باشد. ولی چون همیشه $\max(|z_1|,|z_2|) > 1$، اگر ROC علی باشد:

$$|z| > \max(|z_1|,|z_2|) > 1 \quad \Rightarrow \quad |z| = 1 \notin \text{ROC},$$

پس BIBO پایدار نمی‌شود. (معادل همین: چون $|z_1||z_2| = 2$، هرگز نمی‌توان هر دو قطب را داخل دایره‌ی واحد برد.)

در این تفسیر: خیر؛ هیچ انتخابی وجود ندارد که سیستم هم علی و هم پایدار شود.

تفسیر ۲: اجازه‌ی **cancellation** در تابع تبدیل (پایداری ورودی خروجی $H(z)$) اگر اجازه داشته باشیم یک قطب خارج دایره‌ی واحد را با یک صفر صورت حذف کنیم، می‌توان $H(z)$ را به یک سیستم مینیمال علی و BIBO پایدار کاهش داد.
صفر صورت $1 + bz^{-1}$ در $z = -b$ است. برای حذف، باید مخرج نیز عامل $(1 + bz^{-1})$ داشته باشد:

$$1 - az^{-1} - 2z^{-2} = (1 + bz^{-1})(1 - rz^{-1}).$$

با مقایسه‌ی ضرایب:

$$br = 2, \qquad b - r = -a \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{b}, \qquad a = \frac{2}{b} - b.$$

پس بعد از حذف، داریم:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{2}{b}z^{-1}}.$$

برای علی و پایدار بودن کافی است قطب باقی‌مانده داخل دایره‌ی واحد باشد:

$$\left|\frac{2}{b}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |b| > 2,$$

و آنگاه با ROC علی $|z| > \left|\frac{2}{b}\right|$ دایره‌ی واحد داخل ROC است.

در این تفسیر: بله؛ اگر |b|>2 و $a = \frac{2}{b} - b$ انتخاب شود، سیستم ورودی خروجی هم علی و هم BIBO پایدار می‌شود.

(مثال: $b = 4 \Rightarrow a = \frac{2}{4} - 4 = -3.5$ و پس از حذف، $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$)

نکته‌ی تکمیلی: این حذف ممکن است فقط BIBO (ورودی خروجی) را پایدار کند، ولی در همین پیاده‌سازی شکل، یک مود ناپایدار داخلی در $v[n]$ می‌تواند باقی بماند (پایداری داخلی نقض شود).

۳ سوال سوم

سوال ۳) تعیین $x[n]$ از روی اطلاعات $X(z)$ (به فرم **rational**)

یادآوری: اگر

$$\frac{1}{1-pz^{-1}}$$

باشد، آنگاه

$$\mathcal{Z}^{-1}\Big\{\frac{1}{1-pz^{-1}}\Big\} = \begin{cases} p^n u[n], & |z| > |p| \\ -p^n u[-n-1], & |z| < |p| \end{cases}$$

که $u[n]$ تابع پله است.

(الف) poles: $z = -1,\ z = \frac{1}{2}$ و $x[1] = x[-1] = 1$ و ROC شامل $z = \frac{3}{4}$.

چون $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$، پس ROC بین دو قطب است:

$$\text{ROC}: \qquad \frac{1}{2} < |z| < 1,$$

بنابراین $x[n]$ two-sided است و می‌نویسیم

$$X(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-(-1)z^{-1}} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1+z^{-1}}.$$

با توجه به ROC:

$$\frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \iff A\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n], \qquad \frac{B}{1+z^{-1}} = \frac{B}{1-(-1)z^{-1}} \iff -B(-1)^n u[-n-1].$$

پس

$$x[n] = A\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] - B(-1)^n u[-n-1].$$

از شرط‌ها:

$$x[1] = A\Big(\frac{1}{2}\Big) = 1 \Rightarrow A = 2, \qquad x[-1] = -B(-1)^{-1}u[0] = B = 1.$$

$$\boxed{x[n] = 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] - (-1)^n u[-n-1]}$$

(یعنی برای $n \geq 0$: $x[n] = 2(1/2)^n$ و برای $n \leq -1$: $x[n] = (-1)^{n+1}$.)

(ب) $x[n]$ right-sided است و $X(z)$ تنها یک قطب دارد، و $x[0] = 2,\ x[2] = \frac{1}{2}$.

با فرض یک قطب (و کسر مرتبه‌اول):

$$X(z) = \frac{A}{1 - pz^{-1}}, \qquad \text{ROC} : |z| > |p| \ \Rightarrow\ x[n] = Ap^n u[n].$$

از $x[0] = 2$ داریم $A = 2$. همچنین:

$$x[2] = 2p^2 = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ p^2 = \frac{1}{4} \ \Rightarrow\ p = \pm\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{x[n] = 2\Big(\pm\frac{1}{2}\Big)^n u[n]}$$

(با اطلاعات داده‌شده، علامت p یکتا نمی‌شود.)

(پ) $x[n]$ two-sided است و تبدیل Z آن قطبی در $z = \frac{1}{4}$ دارد، همچنین $x[-1] = 1,\ x[-3] = \frac{1}{4},\ X(1) = \frac{11}{3}$.

چون $x[n]$ two-sided است، باید حداقل دو قطب با اندازه‌های متفاوت داشته باشیم. پس به‌صورت تجزیه کسر:

$$X(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - pz^{-1}}, \qquad \text{ROC} :\ \frac{1}{4} < |z| < |p|.$$

در این ROC، جمله‌ی اول راست‌گرا و جمله‌ی دوم چپ‌گرا می‌شود، لذا:

$$x[n] = A\Big(\frac{1}{4}\Big)^n u[n] \ -\ B\,p^n u[-n-1].$$

برای $n = -1, -3$ فقط بخش چپ‌گرا می‌ماند:

$$x[-1] = -Bp^{-1} = 1 \Rightarrow B = -p, \qquad x[-3] = -Bp^{-3} = p^{-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \pm 2.$$

اکنون از $X(1) = \frac{11}{3}$ (و چون 1 داخل ROC است) داریم:

$$X(1) = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{B}{1 - p} = \frac{4A}{3} + \frac{-p}{1 - p} = \frac{11}{3}.$$

<u>حالت ۱: $p = 2$</u> $\Rightarrow\ B = -2$:

$$\frac{4A}{3} + 2 = \frac{11}{3} \Rightarrow A = \frac{5}{4}.$$

$$\boxed{x[n] = \frac{5}{4}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n u[n] \ +\ 2^{n+1}u[-n-1] \qquad (\text{ROC} :\ \frac{1}{4} < |z| < 2)}$$

<u>حالت ۲: $p = -2$</u> $\Rightarrow\ B = 2$:

$$\frac{4A}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3} \Rightarrow A = \frac{9}{4}.$$

$$\boxed{x[n] = \frac{9}{4}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n u[n] \ -\ 2(-2)^n u[-n-1] \qquad (\text{ROC} :\ \frac{1}{4} < |z| < 2)}$$

(این دو جواب هر دو با داده‌های مسئله سازگارند؛ برای یکتا شدن، یک مقدار دیگر از $x[n]$ لازم است.)

۴ سوال چهارم

می‌دانیم سیستم causal است و

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}.$$

۱) تعیین صفر a از شرط جمع
داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} h[n] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad H(2) = 0.$$

پس $z = 2$ یک zero برای $H(z)$ است. از طرفی گفته شده $H(z)$ یک صفر در $z = a \neq 0$ دارد، بنابراین

$$\boxed{a = 2.}$$

۲) ساختن $H(z)$
چون $h[n]$ حقیقی است، اگر $H(z)$ یک pole در $z = \frac{j}{2}$ داشته باشد، باید pole مزدوج آن یعنی $z = -\frac{j}{2}$ را هم داشته باشد. پس مخرج کمینه:

$$(1 - \tfrac{j}{2} z^{-1})(1 + \tfrac{j}{2} z^{-1}) = 1 + \tfrac{1}{4} z^{-2}.$$

همچنین صفر در $z = 2$ یعنی عامل $(1 - 2z^{-1})$ در صورت.
پس (با یک بهره‌ی K):

$$H(z) = K \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{4} z^{-2}}.$$

از $h[0] = 1$ و این‌که برای سیستم causal داریم $h[0] = \lim_{z \to \infty} H(z)$، نتیجه می‌شود:

$$1 = h[0] = \lim_{z \to \infty} H(z) = K \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = 1.}$$

پس

$$\boxed{H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{4} z^{-2}}} \qquad (\text{ROC} |z| > \tfrac{1}{2} \text{ برای causal:}).$$

(الف) آیا سیستم پایدار است؟
برای پایداری BIBO باید دایره‌ی واحد $|z| = 1$ داخل ROC باشد. قطب‌ها در $z = \pm\frac{j}{2}$ هستند (قدر مطلق $\frac{1}{2}$) و چون سیستم causal است:

$$\text{ROC}: \ |z| > \tfrac{1}{2}$$

که دایره‌ی واحد را شامل می‌شود. بنابراین:

$$\boxed{\text{بله، سیستم پایدار است.}}$$

(ب) آیا وارون سیستم توأماً پایدار و علی است؟
وارون:

$$H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1 + \frac{1}{4} z^{-2}}{1 - 2z^{-1}}.$$

این تابع یک pole در $z = 2$ دارد (چون $H(z)$ در $z = 2$ صفر داشت). اگر وارون causal باشد، ROC آن باید بیرون قطب باشد:

$$|z| > 2,$$

که دایره‌ی واحد را شامل نمی‌شود $\Rightarrow$ ناپایدار.
اگر وارون پایدار باشد، باید ROC شامل $|z| = 1$ باشد؛ برای قطب 2 تنها انتخاب پایدار:

$$|z| < 2$$

است که anti-causal می‌شود، نه causal.
پس:

$$\boxed{\text{خیر؛ وارون نمی‌تواند هم‌زمان پایدار و علی باشد.}}$$

(پ) تابع تبدیل وارون را بیابید

$$\boxed{H^{-1}(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - 2z^{-1}} = \frac{z^2 + \frac{1}{4}}{z^2 - 2z}.}$$

(صفرهای $H^{-1}(z)$ در $z = \pm\frac{j}{2}$ و قطب آن در $z = 2$ است.)

۵ سوال پنجم

LSI با

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

داریم: قطب $H(z)$ در $z = \frac{1}{2}$ و صفرها در $z = \pm 1$ هستند (چون $1 - z^{-2} = 0 \Rightarrow z = \pm 1$). برای یک تابع rational، ROC می‌تواند یکی از دو حالت

$$|z| > \tfrac{1}{2} \quad \text{(right-sided)} \qquad \text{یا} \qquad |z| < \tfrac{1}{2} \quad \text{(left-sided)}$$

باشد.
(الف) «$H(z)$ می‌تواند تابع تبدیل یک سیستم causal باشد.»
درست. چون اگر ROC را

$$|z| > \tfrac{1}{2}$$

بگیریم، ROC شامل ∞ است و پاسخ ضربه right-sided می‌شود، پس سیستم causal است.
(ب) «اگر ROC به‌صورت $|z| < \frac{1}{2}$ باشد، برای ورودی $x[n] = 2^n u[-n-1]$ خروجی $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n-2]$ است.»
نادرست.
ابتدا تبدیل Z ورودی:

$$x[n] = 2^n u[-n-1] \iff X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n} = -\frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \qquad \text{ROC}: \ |z| < 2.$$

پس

$$Y(z) = H(z)X(z) = -\frac{1 - z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}.$$

تجزیه‌ی کسر (در متغیر z^{-1}) می‌دهد:

$$Y(z) = 1 - \frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

از آن‌جا که ROC کلی برابر اشتراک ROCهاست، در این بند

$$\text{ROC}: \ |z| < \tfrac{1}{2}$$

و هر دو جمله‌ی کسری باید به‌صورت left-sided وارون شوند:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-az^{-1}}\right\} = -a^n u[-n-1] \quad (|z| < |a|).$$

بنابراین:

$$\boxed{y[n] = \delta[n] + \left(2^n + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)u[-n-1].}$$

(پس گزاره‌ی داده‌شده برای $y[n]$ صحیح نیست.)

(پ) «اگر ROC به‌صورت $|z| > \frac{1}{2}$ باشد،

$$h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}u[n] - 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

است.»

نادرست.

برای ROC برابر $|z| > \frac{1}{2}$ داریم:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \iff \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n].$$

و چون $1 - z^{-2}$ در حوزه‌ی زمان یعنی $x[n] - x[n-2]$، پس

$$h[n] = g[n] - g[n-2], \qquad g[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n].$$

بنابراین:

$$\boxed{h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2].}$$

(که به‌وضوح شامل $u[n-2]$ است و با عبارت گزاره یکی نیست.)

۶ سوال ششم

با توجه به این‌که پاسخ سیستم right-sided است، برای

$$\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

داریم:

$$\frac{1}{1-2z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} \qquad (ROC: |z| > 2).$$

همچنین:

$$\cos(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{-2k}.$$

پس:

$$H(z) = \frac{\cos(z^{-1})}{1-2z^{-1}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{-2k}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}\right).$$

بنابراین ضریب z^{-n} (یعنی $h[n]$) از هم‌نهشتی ضرایب به‌دست می‌آید:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, 2^{\,n-2k}\, u[n].$$

برای $n = 9$:

$$h[9] = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, 2^{\,9-2k} = 2^9 - \frac{2^7}{2!} + \frac{2^5}{4!} - \frac{2^3}{6!} + \frac{2^1}{8!}.$$

محاسبه:

$$h[9] = 512 - 64 + \frac{32}{24} - \frac{8}{720} + \frac{2}{40320} = 448 + \frac{4}{3} - \frac{1}{90} + \frac{1}{20160}.$$

پس:

$$\boxed{h[9] = \frac{9\,058\,337}{20\,160} \approx 449.322073}$$

سوال هفتم

(الف) LSI با

$$h[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \cos\left(\tfrac{\pi n}{3}\right) u[n]$$

داده شده است. برای به‌دست آوردن difference equation، ابتدا Z-transform را می‌گیریم.

می‌نویسیم:

$$\cos(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2}, \qquad \omega = \frac{\pi}{3},\ r = \frac{1}{4}.$$

پس

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-re^{j\omega}z^{-1}} + \frac{1}{1-re^{-j\omega}z^{-1}}\right) = \frac{1 - r\cos\omega\, z^{-1}}{1 - 2r\cos\omega\, z^{-1} + r^2 z^{-2}}.$$

با $\cos(\pi/3) = 1/2$ و $r = 1/4$:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{8}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2}}.$$

پس:

$$\left(1 - \tfrac{1}{4}z^{-1} + \tfrac{1}{16}z^{-2}\right)Y(z) = \left(1 - \tfrac{1}{8}z^{-1}\right)X(z),$$

و در حوزه‌ی زمان:

$$\boxed{y[n] - \frac{1}{4}\, y[n-1] + \frac{1}{16}\, y[n-2] = x[n] - \frac{1}{8}\, x[n-1].}$$

(ب) معادلات داده شده:

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + 2v[n] + v[n-1], \qquad v[n] = \frac{1}{3}v[n-1] + w[n-1], \qquad w[n] = \frac{1}{2}x[n] + 2x[n-1].$$

با گرفتن Z-transform:

$$\begin{aligned} Y(z)\big(1-\tfrac{1}{2}z^{-1}\big) &= (2+z^{-1})V(z), \\ V(z)\big(1-\tfrac{1}{3}z^{-1}\big) &= z^{-1}W(z), \\ W(z) &= \big(\tfrac{1}{2}+2z^{-1}\big)X(z). \end{aligned}$$

پس تابع تبدیل کل:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(2+z^{-1})\,z^{-1}\,(\frac{1}{2}+2z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{z^{-1}+\frac{9}{2}z^{-2}+2z^{-3}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}.$$

بنابراین:

$$\Big(1-\tfrac{5}{6}z^{-1}+\tfrac{1}{6}z^{-2}\Big)Y(z) = \Big(z^{-1}+\tfrac{9}{2}z^{-2}+2z^{-3}\Big)X(z),$$

و در حوزه‌ی زمان:

$$\boxed{y[n] - \frac{5}{6}\,y[n-1] + \frac{1}{6}\,y[n-2] = x[n-1] + \frac{9}{2}\,x[n-2] + 2x[n-3].}$$

(معادل بدون کسر:)

$$\boxed{6y[n] - 5y[n-1] + y[n-2] = 6x[n-1] + 27x[n-2] + 12x[n-3].}$$

مراجع